Cicli pari e 2-fattori pari di grafi semplici.

Simona Bonvicini
(lavoro in collaborazione con Arrigo Bonisoli)

Sia G un grafo semplice finito. Una decomposizione in cicli di G è una partizione di $E(G)$ in cicli. Un grafo G si può decomporre in cicli se e soltanto se ogni vertice di G ha grado pari. Se $\mathcal{D}$ è una decomposizione in cicli e ogni ciclo di $\mathcal{D}$ ha lunghezza pari, si dice che $\mathcal{D}$ è una decomposizione in cicli pari di G. Tali decomposizioni sono largamente studiate perché danno luogo a problemi di teoria dei grafi particolarmente interessanti. Diciamo che una decomposizione $\mathcal{D}$ di G in cicli pari ha indice $m \geq 1$ se è possibile ripartire i cicli di $\mathcal{D}$ in modo tale da ottenere m sottografi 2-regolari di G. Presentiamo un problema e alcuni risultati che riguardano l'indice di una decomposizione. Tale problema nasce dallo studio di un parametro cromatico , noto come "palette index". Nel caso di grafi 4-regolari, tale parametro può assumere i valori 3, 4 oppure 5. Si può dimostrare che il "palette index" di un grafo 4-regolare è 3 se e soltanto se il grafo ha una decomposizione in cicli pari di indice 3 oppure un 2-fattore pari (2-fattore in cui ogni componente connessa è un ciclo pari). Abbiamo diversi esempi di grafi 4-regolari con un 2-fattore pari e/o una decomposizione in cicli pari di indice 3, quindi grafi con "palette index" 3. Abbiamo anche esempi di grafi 4-regolari con "palette index" 4 e 5, ma in tal caso gli esempi che conosciamo non possiedono una decomposizione in cicli pari. Si pone così il problema sull'esistenza di un grafo 4-regolare che ha "palette index" maggiore di 3 e possiede una decomposizione in cicli pari. Se un tale grafo esiste, allora ogni sua decomposizione in cicli pari ha indice maggiore di 3. Nell'affrontare tale problema abbiamo ottenuto alcuni risultati che riguardano l'esistenza di un 2-fattore pari e di una decomposizione in cicli pari di indice 3 per grafi 4-regolari con proprietà strutturali particolarmente interessanti, ossia i "line graphs" di grafi cubici.